33. Es zeigte sich, daß die großen Einzelkörper mehr in der Masse, die kleinen mehr in der optischen Wirkung zur Geltung kommen (man vergl. auch den Schluß von Art. 28). — Dies sieht man auch ohne weiteres: denn wenn man einen Körper in Teile zerlegt, deren lineares Ausmaß $= 1/n$ des ursprünglichen ist, so bleibt die Masse dieselbe, aber die sichtbare Fläche wird n-mal so groß. Da n willkürlich ist, so kann man theoretisch jeden Effekt der Sichtbarkeit erzielen.

Mit dieser Bemerkung klärt sich wohl eine Frage, über die ich in meteorologischen Lehrbüchern keine Auskunft fand: nämlich weshalb dunstige Sicht gutes Wetter bedeutet, klar werdender Horizont und auffällig schöner Sternhimmel Vorboten von Regen sind.

Denn die Luft erscheint dunstig, weil sie erfüllt ist von kleinen Wasserkügelchen, die das Licht abfangen und zerstreuen. Bereitet sich Regen vor, so vereinigen sich die Kügelchen in sukzessiv größere, die Fläche wird kleiner und die Sicht muß sich aufhellen.

Über das Ergebnis.

34. Der mit dem Siriusbegleiter (c) zu einem engeren Binarsystem verbundene dunkle Trabant (t) muß auch vom hellen Begleiter selbst Licht zugesandt erhalten; aber wegen der Formel [vergl. (3) Art. 2 und $(3)_m$ Art. 3]:

$$\frac{H_t}{H_c} = A \cdot \left(\frac{R_t}{r_{ct}}\right)^2 \cdot \frac{2}{3\pi}$$

die für einen mittleren Phasenwinkel $\alpha = 90°$ gilt, würde er, bei einer Albedo $A = 1$, uns in der Größenklasse erscheinen:

r_{ct}	Größe	r_{ct}	Größe
1	21.8	0.5	20.3
0.9	21.6	0.4	19.9
0.8	21.4	0.3	19.2
0.7	21.1	0.2	18.3
0.6	20.7	0.1	16.8

Bei der gegenseitigen Nähe und dem Größenkontrast gegen den Begleiter c wird er uns wohl immer unsichtbar bleiben müssen.

35. Die Existenz des Trabanten t wird vielmehr nur durch Beobachtungen am Begleiter c erwiesen werden können; nämlich

a) durch mikrometrische Messungen gegen den Hauptstern,
b) durch Beobachtung der Linienverschiebungen am Begleiter c.

Es ist kaum zu bezweifeln, daß es der heutigen Beobachtungskunst gelingen wird, Ziele von solcher Schwierigkeit zu erreichen. Eine Rotverschiebung von 20 km pro Sek. hat Herr *Adams* bereits nachzuweisen vermocht. Man hat sie im Sinne der *Einstein*schen Theorie gedeutet. Die Entscheidung würde fallen, wenn zu einer anderen Zeit eine entgegengesetzte Verschiebung nachgewiesen wird.

36. In einer früheren Zeit hätte ein Ergebnis von dieser Art befremdlich erscheinen müssen, nämlich ein kleiner Körper von relativ großer Helligkeit neben einer großen, aber unsichtbaren Masse.

Zuerst war es die Häufigkeit von Komplementärfarben bei Doppelsternen, welche den Gedanken nahelegte, daß es sich eben nicht um bloße Kontrastwirkungen handeln könne.

Die Tatsache der »Riesen« und »Zwerge« brachte die entscheidende Erweiterung unserer Kenntnis. Hält man damit zusammen, daß nach neueren Wahrnehmungen die Zahl der spektroskopischen Doppelsterne eine mutmaßlich ungeheure ist, so muß auch unsere Kombination an Wahrscheinlichkeit gewinnen.

Ein direktes Seitenstück aber dürften wir vor uns haben in *o* Ceti mit seinem Begleiter zehnter Größe.

Die veränderlichen (und die »neuen«) Sterne und ihre Stellung im Lebensprozeß der Sterne werden voraussichtlich noch eine Fülle der Erscheinungen darbieten, gegen welche das bis jetzt Bekannte noch wenig ist. Denn es ist die weite Strecke zu überbrücken von den Flecken auf unserer Sonnenoberfläche bis zu den Vulkanen auf unserer Erde. Solche Rieseneruptionen wie die, welche den roten Fleck auf dem Jupiter erzeugt hat, und noch größere und länger verbleibende, werden zu den notwendigen Phasen des Lebensprozesses oder vielmehr des Absterbens gehören. Hat ein solches Ereignis beim dunklen Siriustrabanten in historischer Zeit stattgefunden, so wäre zu verstehen, warum die Alten den Sirius als einen rötlichen Stern bezeichnet haben.

Gotha, 1926 Sept. 20. *E. Anding.*

Über die Abhängigkeit zwischen $\int \varkappa \varrho \, dh$ und der Temperatur in den äußeren Schichten der Sonne.

(Einige Bemerkungen über die Strahlungsgleichgewichtstheorie). Von *N. Kosirev* und *V. Ambarzumian.*

1. In seinen Untersuchungen über das Strahlungsgleichgewicht der Sonnenatmosphäre hat *Schwarzschild*[1]) folgende Voraussetzung zugrunde gelegt. Es sei A der gesamte nach außen gehende Energiestrom, B der gesamte nach innen gehende und E das Emissionsvermögen des absolut schwarzen Körpers bei der Temperatur der gegebenen Schicht. *Schwarzschild* setzt voraus, daß folgende Beziehungen gelten:

$$dB/dh = k\varrho(E-B) \qquad dA/dh = -k\varrho(E-A) \qquad (1)$$

wo h wiederum die Tiefe ist, welche zum Sonnenzentrum hin zunimmt, ϱ die Dichte und k der gesamte Absorptionskoeffizient. Da ein jeder Strom A und B aus verschiedenen Bündeln von Strahlungsenergie, welche unter verschiedenen Winkeln gehen und verschieden absorbiert werden, zusammengesetzt ist, so kann man im allgemeinen nicht den Koeffizienten k in beiden Formeln (1) identifizieren. Wir weisen diese willkürliche Voraussetzung zurück und werden unter $\varkappa$ den gesamten Absorptionskoeffizienten der Strahlen, welche der Normalen entlang laufen, verstehen. Die Strahlungsgleichgewichtsbedingung im Falle einander paralleler ebener Schichten, in deren jeder die Temperatur, die Dichte und der Absorptionskoeffizient unveränderlich sind, kann man in

[1]) Göttinger Nachrichten 1906 p. 41-53.

folgender Weise aufstellen:

$$4\pi\,\varphi(\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(z)}{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}\cdot e^{-\sec\alpha\left|\int\limits_{\zeta}^{z}\varkappa\rho\,dz\right|}\varkappa\,\varrho\,dz\,dx\,dy. \tag{2}$$

Dabei fällt die z-Achse zusammen mit der Normale der Schichten; $\varphi(z)$ und $\varphi(\zeta)$ stellen die Strahlung des absolutschwarzen Körpers in den den Höhen z und ζ entsprechenden Schichten nach dem *Stefan-Boltzmann*schen Gesetze dar.

Wir wollen folgende Koordinatentransformation einführen:

$$x=(z-\zeta)\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\cos\psi\quad y=(z-\zeta)\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\sin\psi\quad z=z \tag{3}$$

Die Jacobische Determinante dieser Transformation hat folgenden Wert:

$$J=\sin\alpha\,\sec^3\alpha\,(z-\zeta)^2. \tag{4}$$

Hiermit kann die Formel (2) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$4\pi\,\varphi(\zeta)=\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{1/2\pi}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\,\mathrm{tg}\,\alpha\;e^{-\sec\alpha\left|\int\limits_{\zeta}^{z}\varkappa\,\rho\,dz\right|}\varkappa\,\varrho\,dz.$$

Wir führen die Bezeichnungen ein

$$\int\limits_0^z\varkappa\,\varrho\,dz=t;\qquad\int\limits_0^{\zeta}\varkappa\,\varrho\,dz=s$$

und es sei auch

$$\varphi(z)=\chi(t)\qquad\varphi(\zeta)=\chi(s)$$

dann ist $dt=\varkappa\,\varrho\,dz$ und ferner ergibt sich:

$$4\pi\,\chi(s)=2\pi\int\limits_0^{1/2\pi}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi(t)\,\mathrm{tg}\,\alpha\;e^{-|s-t|\sec\alpha}dt. \tag{5}$$

Wir setzen voraus, daß t sich von $-\infty$ bis $+\infty$ ändert, d. h. daß die betrachteten Schichten sich in großer Tiefe befinden. Durch Integration der Gleichung (5) nach α erhalten wir:

$$\chi(s)=\tfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ei\,|s-t|\,\chi(t)\,dt \tag{6}$$

wo die Bezeichnung

$$Ei\,x=\int\limits_x^{\infty}e^{-u}\,du/u \tag{7}$$

eingeführt ist.

Die Gleichung (6) kann man auch auf anderem Wege erhalten. Wir wollen die Strahlungsgleichgewichtsbedingung durch die Formel:

$$2\pi\int\limits_0^{1/2\pi}\sin\alpha\,\cos\alpha\,J\sec\alpha\,d\alpha+2\pi\int\limits_0^{1/2\pi}\sin\alpha'\,\cos\alpha'\,J'\sec\alpha'\,d\alpha'==4\pi\,\varphi(\zeta) \tag{8}$$

ausdrücken, wo $\alpha'=\pi-\alpha$ gesetzt ist. J stellt den Strahlungsenergiestrom dar, welcher unter dem Winkel α zur Normalen in der Richtung abnehmender Werte von z geht, J' ist der Strahlungsenergiestrom der unter dem Winkel α' zur entgegengesetzt gerichteten Normalen in die Richtung wachsender Werte von z fällt. Das erste Glied der linken Seite dieser Gleichung ist der Absorption des gesamten aufwärtsgehenden Stromes proportional, das zweite Glied ist der Absorption des gesamten einwärts gehenden Stromes proportional. J und J' sind durch folgende Formel[1]) bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}J&=e^{s\sec\alpha}\int\limits_s^{\infty}\chi(t)\,e^{-t\sec\alpha}\sec\alpha\,dt\\ J'&=e^{-s\sec\alpha}\int\limits_{-\infty}^{s}\chi(t)\,e^{t\sec\alpha'}\sec\alpha'\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Durch Substitution von (9) in Gleichung (8) erhalten wir

$$2\varphi(\zeta)=\int\limits_0^{1/2\pi}e^{s\sec\alpha}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,d\alpha\int\limits_s^{\infty}\chi(t)\,e^{-t\sec\alpha}\,dt+\\+\int\limits_0^{1/2\pi}e^{-s\sec\alpha'}\,\mathrm{tg}\,\alpha'\,d\alpha'\int\limits_{-\infty}^{s}\chi(t)\,e^{t\sec\alpha}\,dt.$$

Aus letzterer Gleichung erhalten wir (5) und weiter (6). Die Integralgleichung (6) ist eine zur Unendlichkeit erstreckte homogene Gleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern. Es ist wichtig, daß der Kern einen unendlich großen Wert bei $s=t$ hat. Für die Möglichkeit des Strahlungsgleichgewichts bei den oben aufgestellten Bedingungen ist es notwendig, daß die Zahl $\frac{1}{2}$ ein Eigenwert des Kernes sei. Dies gilt in der Tat und die zum Eigenwert $\frac{1}{2}$ gehörenden Eigenfunktionen sind $\chi(s)=1$; $\chi(s)=s$. Deswegen wird die allgemeine Lösung der Integralgleichung (6)

$$\chi(s)=c\,s+d \tag{10}$$

wo c und d willkürliche Konstanten sind. Wenn aber eine Energieschöpfung hinzukommt (radioaktive Atomzerfällung usw.), so ist die Gleichung (6) durch folgende[2]) zu ersetzen:

$$f(s)=\chi(s)-\tfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ei\,|s-t|\;\chi(t)\,dt \tag{11}$$

wo $4\pi\varkappa f(s)$ die in der Masseneinheit erzeugte Energiegröße ist. Die erhaltene Gleichung (11) ist eine nichthomogene Integralgleichung *Fredholm*scher Art und ihre allgemeine Lösung läßt sich durch folgende Formel ausdrücken:

$$\chi(s)=\chi_0(s)+c\,s+d. \tag{12}$$

Hier ist $\chi_0(s)$ eine einzelne beliebige Lösung der Gleichung (11). Da die Gleichung (11) auf Grund des *Fredholm*schen Satzes Lösungen hat dann, und nur dann, wenn die Orthogonalitätsbedingungen gelten:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s)\,s\,ds=0\qquad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s)\,ds=0 \tag{13}$$

so ist die Funktion $f(s)$ nicht ganz willkürlich, und zwar muß sie den Beschränkungen (13), deren zweite uns zeigt, daß die in einem Teil der Schichten erzeugte Energie von anderen Schichten konsumiert wird, entsprechen.

2. Wir wollen nun die oberflächlichen Schichten der Sonne betrachten. In diesem Falle ersetzt man die Gleichung (6) durch folgende:

$$\chi(s)=\tfrac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}Ei\,|s-t|\,\chi(t)\,dt. \tag{14}$$

[1]) Vgl. *Milne*. Phil. Trans. A Vol. 223 p. 216; MN **81**.365.

[2]) In *Jeans*schen Bezeichnungen $f(s)=\varepsilon/\varkappa$ (s. z. B. MN **86**.576).

Dabei ist der Nullpunkt der Höhen an der Grenze der Sonnenatmosphäre angenommen. Diese Gleichung hat keine nicht verschwindende Lösung, d. h. $\frac{1}{2}$ ist kein Eigenwert, da bei diesem Parameterwert die *Neumann*sche Reihe für die Resolvente konvergiert (außer im Punkte $s=t$) und eine im Grundgebiet ($0 \leqq t < +\infty$) integrierbare Funktion darstellt. Darum kann bei Abwesenheit erzeugter Energie Strahlungsgleichgewicht in den oberflächlichen Schichten nicht stattfinden. Im Falle von Energieschöpfung wird die Gleichung (11) durch folgende ersetzt:

$$f(s) = \chi(s) - \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} Ei\,|s-t|\,\chi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Diese Gleichung hat eine bestimmte Lösung, welche von der Art der Funktion $f(s)$ abhängt.

Schwarzschilds[1]) und *Milnes*[2]) Untersuchungen über das Helligkeitsverteilungsgesetz auf der Sonnenscheibe haben gezeigt, daß die Formel (10) für die Funktion $\chi(s)$ den Beobachtungen gut Genüge leistet. In der zitierten Arbeit findet *Milne* auf Grund des Beobachtungsmaterials das Koeffizientenverhältnis $c/d = \beta = 1.17$. Andererseits ist der Strahlungsenergiestrom, welcher im Winkelabstand α vom Scheibenzentrum ausgeht, durch folgende Gleichung definiert:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\sec\alpha}(ct+d)\sec\alpha\,\mathrm{d}t = c\,\Gamma(2)\cos\alpha + d\,\Gamma(1) = c\cos\alpha + d.$$

Nach Multiplikation mit $2\pi z$ und Integration von 0 bis R (der Sonnenradius) finden wir für die ganze Helligkeit der Sonne die Größe $\pi k^2 (\frac{2}{3}c + d)$. Für die Flächeneinheit haben wir die Helligkeit

$$J = \tfrac{2}{3}c + d = \sigma T_1^4$$

wo T_1 die Effektivtemperatur und σ die *Stefan-Boltzmann*sche Konstante ist.

Da auf Grund des oben Gesagten $c = \beta d$ ist, so haben wir für d den Ausdruck:

$$d = \sigma T_1^4 / (1 + \tfrac{2}{3}\beta).$$

Da wir auch $d = \sigma T_0^4$ haben, wo T_0 die Temperatur der äußeren Grenze der Sonne ist, so erhalten wir nun:

$$T_0 = T_1 / \sqrt[4]{(1 + \tfrac{2}{3}\beta)}.$$

Aus den *Abbot*schen Messungen der Sonnenkonstante kann man für T_1 den Wert ableiten $T_1 = 5740°$[3]). So ergibt sich für T_0, wenn man $\beta = 1.17$ setzt, $T_0 = 4970°$.

Auf Grund der Formeln (10) und (15) können wir nun $f(s)$ berechnen. Wir erhalten

$$f(s) = \tfrac{1}{2}\int_{\infty}^{0} Ei\,|s-t|\,(ct+d)\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Aus dieser Formel folgt, daß $f(s)$ bei Annäherung von s an null zunimmt. Da dabei die Temperatur abnimmt, so müssen wir schließen, daß diese Zunahme von $f(s)$ infolge von Konvektion, aber nicht von radioaktiver Atomzerfällung entsteht.

3. Setzen wir in Gleichung (10) σT^4 statt $\chi(s)$, so erhalten wir $\sigma T^4 = cs + d$. Nach Differentiierung dieser Formel nach z (Höhe) haben wir

$$4\sigma T^3\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}z = c\,\varkappa\,\varrho \tag{17}$$

da $s = \int_0^z \varkappa\,\varrho\,\mathrm{d}z$ ist. Die Gaszustandsgleichung gibt uns:

$$p = RT/M \cdot \varrho \tag{18}$$

wo p der Gasdruck ist, R die universelle Gaskonstante und M das Molekulargewicht. Wenn man in diese Gleichung den Ausdruck für ϱ aus (17) setzt, so erhält man:

$$p = 4\sigma R/\varkappa c M \cdot T^4\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}z. \tag{19}$$

Da der Lichtdruck durch die Formel

$$q = \tfrac{1}{3}\alpha\,T^4 \tag{20}$$

bestimmt ist, wo α eine Konstante gleich $4\sigma/c$ ist, so finden wir für p/q aus (19) und (20)

$$p/q = 3RC/\varkappa c M \cdot \mathrm{d}T/\mathrm{d}z. \tag{21}$$

Wenn man voraussetzt, daß der Absorptionskoeffizient und das Molekulargewicht von der Höhe unabhängig sind, so ergibt sich der wichtige Schluß, daß das Verhältnis des Gasdruckes zum Lichtdruck dem Temperaturgradienten proportional ist.

Wenn man von der Formel (10) ausgeht und ganz analog den *Schwarzschild*schen Entwicklungen einen Zusammenhang zwischen Temperatur und der Höhe sucht, und dabei den Lichtdruck einführt, dann erhält man folgende Relation:

$$\frac{Mg}{R}\cdot z = m^5\,T_0 \cdot \left[\frac{4T}{m T_0} + \log\frac{T - T_0 m}{T + T_0 m} - 2\,\mathrm{arctg}\frac{T}{T_0 m} + C\right] \tag{22}$$

wo

$$m = \sqrt[4]{\frac{g}{g - \frac{1}{3}\alpha\,T_0^4\,\varkappa\,\beta}}$$

bezeichnet.

Hieraus folgt, daß der Temperaturgradient beim Eindringen in innere Schichten der Sonne zunimmt. Folglich kann man die Voraussetzung über die Unveränderlichkeit des Verhältnisses zwischen Gas- und Lichtdruck nicht annehmen.

Leningrad, 1926 Okt. 13.

V. Ambarzumian, N. Kosirev.

[1]) Göttinger Nachrichten 1906 p. 52-53. [2]) Phil. Trans. A Bd. 223 p. 217. [3]) *Milne.* Ibid p. 208.

Mikrometermessungen von Doppelsternen. Mitgeteilt von *C. Luplau Janssen.*

Die vorliegende Reihe von Doppelsternmessungen bildet eine unmittelbare Fortsetzung der früheren. Die Positionen sind nur grobe Näherungen, wie sie bei den Einstellungen benutzt sind. Die Beobachtungen sind ausschließlich mit dem Cookeschen Mikrometer angestellt worden (Schraubenwert 13"0913). Es bedeuten: F = *Sigurd Fjeltofte*, J = *C. Luplau Janssen*, L = *Svend Lauritzen*. Die Nummern beziehen sich auf *Burnhams* General Catalogue.